1. Demostrar las siguientes identidades.

   a) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$,

   b) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2$,

   c) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$.

2. Hallar el fallo en el siguiente razonamiento. Si $x = y$ entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x-y)(x+y) &= (x-y)y, \\ x+y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

3. Expresar en términos de intervalos los conjuntos de números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes desigualdades.

   a) $4 - x < 3 - 2x$,

   b) $5 - x^2 < 8$,

   c) $(x-1)(x-3) > 0$,

   d) $x^2 - 2x + 2 > 0$,

   e) $x^2 + x + 1 > 2$,

   f) $x^2 - x + 10 > 16$,

   g) $2^x < 8$,

   h) $x + 3^x < 4$.

4. Demostrar que si $a, b > 0$ entonces se tiene la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que se verifican las siguientes identidades

$$\text{máx}\, a, b = \frac{a+b+|a-b|}{2},$$
$$\text{mín}\, a, b = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

6. Hallar los números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes propiedades.
    a) $|x-3| = 8$,
    b) $|x-3| < 8$,
    c) $|x+4| < 2$
    d) $|x-1| + |x-2| > 1$,
    e) $|x-1| + |x+1| < 2$,
    f) $|x-1| + |x+1| < 1$,
    g) $|x-1| \cdot |x+1| = 0$,
    h) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$.

7. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas.
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= (1 + 2 + \cdots + n)^2. \end{aligned}$$

8. Encontrar una fórmula para
    a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$,
    b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$.

9. Demostrar la identidad de Pascal
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

10. Usar la identidad de Pascal para probar por inducción la fórmula del binomio
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

11. Demostrar la siguiente identidad
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

12. Demostrar que
    a) $\sqrt{3}$ es irracional,
    b) $\sqrt{6}$ es irracional,
    c) $\log_2(3)$ es irracional.

13. Probar que si $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es irracional entonces tanto $r + \alpha$ como $r\alpha$ son números irracionales.

14. Demostrar que

    a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional,

    b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$ es irracional.

15. Probar que existen números irracionales $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que α^β es racional.

16. Deducir el principio de inducción matemática a partir del principio de buena ordenación.

17. Deducir el principio de inducción completa a partir del principio de inducción ordinaria.

18. Demostrar la desigualdad de Bernoulli, es decir, si $h > -1$ entonces
$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

19. Demostrar que si $x \in \mathbb{R}$ satisface una ecuación algebraica
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0$$
con coeficientes enteros $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ entonces x es irracional si no es entero.

20. Probar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ es irracional.