Cálculo infinitesimal **Curso 2009/10**
Relación de problemas 1.2 **Funciones elementales**

---

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,

   b) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$,

   c) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$,

   d) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$.

2. Sean $p(x) = 2^x$, $q(x) = x^2$ y $s(x) = \operatorname{sen} x$. Calcular los valores de las siguientes funciones.

   a) $q \circ p$,

   b) $q \circ s$,

   c) $q \circ p \circ s + s \circ p$,

   d) $s \circ q$.

3. Expresar las siguientes funciones en términos de p, q, s.

   a) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$,

   b) $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$,

   c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$,

   d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$,

   e) $f(x) = 2^{2^x}$,

   f) $f(x) = \operatorname{sen}(2^x + 2^{x^2})$,

   g) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2^{2^{2^{\operatorname{sen} x}}})))$,

   h) $f(x) = 2^{\operatorname{sen}^2 x} + \operatorname{sen}(x^2) + 2^{\operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen} x)}$.

4. El algoritmo de división de polinomios garantiza que si $p(x)$ es un polinomio y $a \in \mathbb{R}$ es un número real entonces existe un polinomio $q(x)$ y un número real $r \in \mathbb{R}$ tales que $p(x) = (x-a)q(x) + r$.

   a) Demostrar el teorema del resto, es decir, el resto de la división de $p(x)$ entre $(x-a)$ viene dado por $r = p(a)$.

   b) Deducir a partir de aquí el teorema del factor, es decir, $(x-a)$ es un factor de $p(x)$ si y sólo si $p(a) = 0$.

   c) Probar que un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces.

5. Determinar los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para los cuales la función
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$
satisface la condición $f(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Describir los rasgos generales de la gráfica de f en los siguientes casos.
   a) f es par,
   b) f es impar,
   c) f es no negativa,
   d) f es periódica de periodo p.

7. Describir la gráfica de g en términos de la gráfica de f.
   a) $g(x) = f(x - c)$,
   b) $g(x) = f(x) + c$,
   c) $g(x) = cf(x)$,
   d) $g(x) = f(cx)$.

8. La función parte entera se define para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante
$$[x] = \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$
Dibujar la gráfica de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = [x]$,
   b) $f(x) = x - [x]$,
   c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$,
   d) $g(x) = [1/x]$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$
Dibujar la gráfica de f. (Considerar los números racionales con $q = 2$, después aquellos con $q = 3$, etc.)

10. Si f es una función real de variable real, se definen la parte positiva y la parte negativa de f mediante $f^+(x) = \text{máx}\{f, 0\}$, $f^-(x) = -\text{mín}\{f, 0\}$. Demostrar que $f = f^+ - f^-$ y que $|f| = f^+ + f^-$. Hallar una expresión para f^+ y $f-$ en términos de f y $|f|$.

11. Probar que toda función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede descomponer como $f = f_p + f_i$, donde f_p es par y f_i es impar. Demostrar que esta descomposición es única.

12. Decidir por medio de pruebas y contraejemplos si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

    a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$,

    b) $(f + g) \circ h = f \circ g + f \circ h$.

13. Probar que no existen funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades.

    a) $f(x) + g(y) = xy$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$,

    b) $f(x)g(y) = x + y$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

14. Sean f, g dos funciones reales de variable real y sea $h = g \circ f$.

    a) Probar que si h es inyectiva entonces f es inyectiva.

    b) Probar que si h es suprayectiva entonces g es suprayectiva.

15. *a*) Probar que si f es inyectiva entonces existe una función g tal que $g \circ f = \mathrm{id}$.

    b) Probar que si g es suprayectiva entonces existe una función f tal que $g \circ f = \mathrm{id}$.

16. Probar las siguientes relaciones entre las funciones trigonométricas y sus inversas.

    a) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$,

    b) $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

17. Demostrar las siguientes propiedades de las funciones hiperbólicas.

    a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$,

    b) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = 1/\cosh^2 x$,

    c) $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$,

    d) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$.

18. Demostrar las siguientes relaciones entre las funciones hiperbólicas y sus inversas.

    a) $\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x) = \sqrt{x^2 - 1}$,

    b) $\cosh(\operatorname{senh}^{-1} x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

19. Calcular expresiones explícitas para las inversas de las funciones hiperbólicas. (Indicación: Tomar la ecuación $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, despejar x en función de y, etc.)