

1. Demostrar las siguientes identidades.

a) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$,

b) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$,

c) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

2. Hallar el fallo en el siguiente razonamiento. Si $x = y$ entonces

$$\begin{aligned}x^2 &= xy, \\x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\(x - y)(x + y) &= (x - y)y, \\x + y &= y, \\2y &= y, \\2 &= 1.\end{aligned}$$

3. Expresar en términos de intervalos los conjuntos de números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes desigualdades.

a) $4 - x < 3 - 2x$,

b) $5 - x^2 < 8$,

c) $(x - 1)(x - 3) > 0$,

d) $x^2 - 2x + 2 > 0$,

e) $x^2 + x + 1 > 2$,

f) $x^2 - x + 10 > 16$,

g) $2^x < 8$,

h) $x + 3^x < 4$.

4. Demostrar que si $a, b > 0$ entonces se tiene la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que se verifican las siguientes identidades

$$\text{máx } a, b = \frac{a + b + |a - b|}{2},$$

$$\text{mín } a, b = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

6. Hallar los números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes propiedades.

a) $|x - 3| = 8,$

b) $|x - 3| < 8,$

c) $|x + 4| < 2$

d) $|x - 1| + |x - 2| > 1,$

e) $|x - 1| + |x + 1| < 2,$

f) $|x - 1| + |x + 1| < 1,$

g) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0,$

h) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3.$

7. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

8. Encontrar una fórmula para

a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1),$

b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2.$

9. Demostrar la identidad de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

10. Usar la identidad de Pascal para probar por inducción la fórmula del binomio

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

11. Demostrar la siguiente identidad

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

12. Demostrar que

a) $\sqrt{3}$ es irracional,

b) $\sqrt{6}$ es irracional,

c) $\log_2(3)$ es irracional.

13. Probar que si $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es irracional entonces tanto $r + \alpha$ como $r\alpha$ son números irracionales.
14. Demostrar que
- a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional,
 - b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$ es irracional.
15. Probar que existen números irracionales $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que α^β es racional.
16. Deducir el principio de inducción matemática a partir del principio de buena ordenación.
17. Deducir el principio de inducción completa a partir del principio de inducción ordinaria.
18. Demostrar la desigualdad de Bernoulli, es decir, si $h > -1$ entonces
- $$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$
19. Demostrar que si $x \in \mathbb{R}$ satisface una ecuación algebraica
- $$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$
- con coeficientes enteros $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ entonces x es irracional si no es entero.
20. Probar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ es irracional.